ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2021-2022 ГГ. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11-Й КЛАСС

№1. Лосяш учит Кроша складывать четырёхзначные числа. Но Крош слушал невнимательно, и вместо того, чтобы добавлять единицу к следующему разряду, когда это необходимо, записывал полученную сумму полностью, а потом переходил к действию со следующим разрядом. В некоторых случаях ответ Кроша совпадал с правильным ответом, а иногда существенно отличался. Например, при сложении 5555 и 6666, он получил 11111111. Какая наименьшая разница с правильным ответом могла у него получиться, если он получил неверный ответ?

Решение.

Заметим, что неверный ответ мог получиться, когда сумма цифр разряда больше 9. При этом, если это разряд тысяч - ответ будет правильный.

Ошибка в любом из оставшихся разрядов (единиц, десятков или сотен) приводит к сдвигу всех следующих за ним разрядов и добавлению следующего разряда в полученной «сумме».

Рассмотрим различные возможные ошибки в вычислении.

Во-первых, если ошибок больше одной, то число разрядов в «сумме» увеличивается больше, чем на один, то есть разница с верным ответом увеличивается. Следовательно, достаточно рассмотреть случаи, когда ошибка одна.

Таких случаев три.

Рассмотрим сумму двух четырехзначных чисел

$$\overline{abcd}+\overline{xyzt} = 10^3(a+x) + 10^2(b+y) + 10(c+z) + (d+t) = M$$

При неправильном счете возможны варианты с одной ошибкой:

1) $b+y \geq 10,\ c+z < 10,\ d+t < 10.$

Тогда «сумма»:

$$\overline{A1BCD} = 10^4(a+x) + (b+y)10^2 + (c+z)10 + (d+t)$$

Отсюда

$$\overline{A1BCD} - M = 10^4(a+x) - 10^3(a+b) = 9000(a+b) \geq 18000$$

18000 достигается при $a=b=1$.

Аналогично можно рассмотреть

2) $b+y < 10,\ c+z \geq 10,\ d+t < 10$

3) $b+y < 10,\ c+z < 10,\ d+t \geq 10$

При этом соответствующие «суммы» равны $\overline{AB1CD}$, и $\overline{ABC1D}$.

Заметим, что при этом происходит скачек через разряд раньше и разность между «суммой» и M становится еще больше.

Ответ: 18000

Критерии оценивания:

7	Полное, обоснованное решение.
6	Верное решение, без пояснения почему не рассмотрены случаи, когда больше одной ошибки при сложении.
4-5	полностью рассмотрен случай 1), без объяснения почему другие варианты приводят к большей разнице.
2-3	Верно записаны шаги решения, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.
1	Выписаны возможные варианты ошибки в сложении, но нет оценки разности.
0	Нет решения, даже при верном ответе.

№2 Что больше $\frac{1}{2022}$ или $\ln\frac{2022}{2021}$?

Решение

Рассмотрим функцию

$$y = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

Найдем производную функции:

$$y' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$$

при $x > 0$, и $y' = 0$ при $x = 0$.

Следовательно, при $x > 0$, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

Положим

$$x = \frac{1}{2021}$$

Тогда

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1/2021}{1+1/2021} = \frac{1}{2022},$$

$$\ln(1+x) = \ln\frac{2022}{2021}$$

Получаем

$$\frac{1}{2022} < \ln\frac{2022}{2021}$$

Критерии оценивания:

7	Полное, обоснованное доказательство.	
6	Полное решение без указания положительности x	
3	Идея рассмотрения монотонности функции не доведена до конца	
0	Нет решения, даже при верном ответе.	

№3 Найти функцию, удовлетворяющую уравнению $25\,f(x) = 9\,f\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt[4]{x+1}$, при $x > 0$

Решение

Сделаем замену $x \to \frac{1}{x}$:

$$25f\left(\frac{1}{x}\right) = 9f(x) + \sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}$$

Имеем

$$\begin{cases} 25f(x) - 9f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt[4]{x+1} \\ 25f\left(\frac{1}{x}\right) - 9f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}+1} \end{cases}$$

Тогда

$$544 \cdot f(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{544}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}\right)$$

Критерии оценивания:

7	Полное, обоснованное решение. Верный ответ.

4	Неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Нет решения, даже при верном ответе.

№4 Группа школьников убирала от снега школьный двор и школьный стадион. Площадь стадиона в три раза меньше площади двора. В части группы, которая работала во дворе было на шесть человек больше. Когда двор был убран, стадион все ещё убирали. Какое наибольшее число школьников было занято уборкой снега (и во дворе, и на стадионе), если все они начали работать одновременно и трудились с одинаковой производительностью.

Решение
Пусть S - площадь стадиона, тогда 3S - площадь двора. Пусть стадион убирало n школьников, тогда во дворе работали - (n+6). Производительность одного школьника - p.
Надо найти наибольшее значение суммы

$$N = 2n + 6$$

При этом, в соответствии с условием

$$\frac{3S}{p(n+6)} < \frac{S}{pn}$$

Рассмотрим это неравенство при условии что n - натуральное число, а p и S - больше нуля.
Тогда $n < 3$.
Следовательно, наибольшее $n = 2$. Тогда $N = 10$
Ответ 10.

Критерии оценивания:

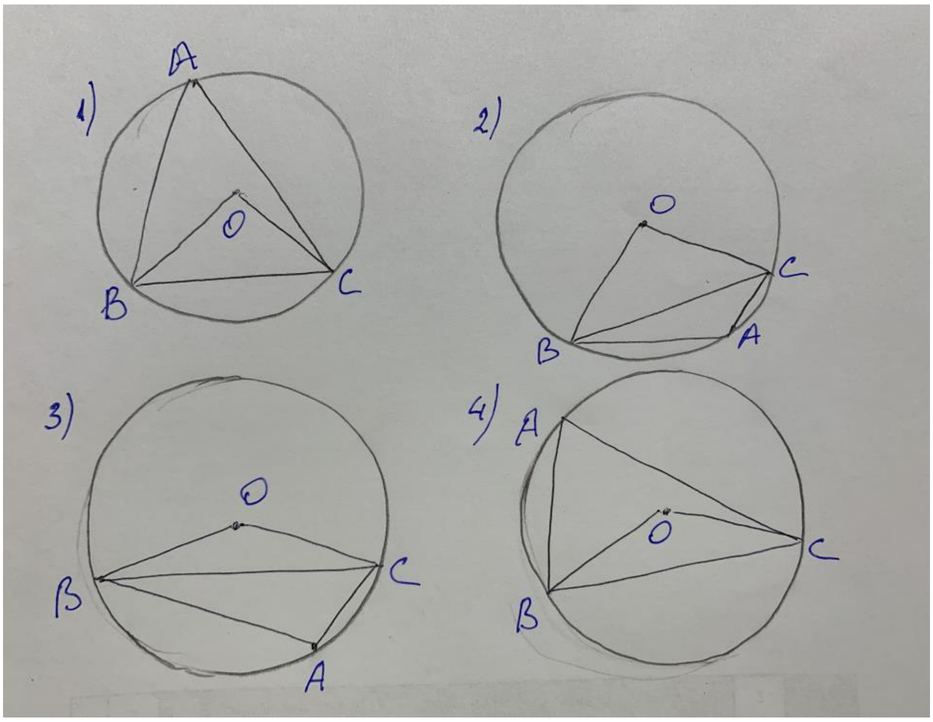
7	Полное, обоснованное доказательство.
5-6	Получен верный ответ, при этом не указано, что n - натуральное число, а p и S - больше нуля.
3-4	ответ получен подбором, обоснование наибольшего значения не полное.
1-2	Ответ не получен, но задача полностью формализована (приведено условие на время и формула для N).
0	Ответ не обоснован, или нет верного ответа.

№5 Дана сфера, с центром в точке O и радиусом 4. Три параллельные прямые касаются этой сферы в точках A, B, C. Найдите угол BAC, если известно, что площадь треугольника COB равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

Решение
1. Радиусы, проведённые из центра сферы к точкам касания, перпендикулярны трём проведённым к сфере касательным. Следовательно, все эти радиусы лежат в одной плоскости. При этом эта плоскость - сечении сферы, содержащее ее центр.
2. Так как $S_{\Delta ABC} = 4$, то

$$\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin BOC = 4$$

То есть $\sin BOC = \frac{1}{2}$
Возможно два варианта для угла BOC: $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{5\pi}{6}$.



3. $\frac{\pi}{6}$.

Рисунки 1) и 2).

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16$

4. $\frac{5\pi}{6}$.

Рисунок 3) $S_{\Delta ABC} < \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$

Только в четвёртой ситуации может оказаться $S_{\Delta ABC} > 16$. это несложно показать, например для равнобедренного ΔABC.

Тогда угол $CAB = \frac{5\pi}{12}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{12}$

Критерии оценивания:

7	Полное обоснованное решение, содержащее все приведённые пункты
5-6	Решение содержит все пункты, однако оценка площади треугольников (ситуация S<16) только анонсирована, не проведена.
4	В решении рассмотрен один случай, в результате которого получается верный ответ.
3	Нет обоснования того, что рассматриваемое сечение содержит центр сферы, остальное решение полное
1-2	Нет обоснования пункта 1) и не полностью рассмотрены все ситуации, но получен верный ответ.
0	Ответ не обоснован, или нет верного ответа.