ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2021-2022 ГГ. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.

10-Й КЛАСС

№1 Доказать, что уравнение $x^4-4x^3+12x^2-8x+2=0$ не имеет действительных решений.

Решение:

Преобразуем данное уравнение, выделив полный квадрат трехчлена:

$(x^2-2x)^2+2(4x^2-4x+1)=0$.

Отсюда уравнение приводится к сумме двух квадратов

$(x^2-2x)^2+2(2x-1)^2=0$.

Данное соотношение возможно лишь при одновременном равенстве нулю

$x^2-2x=0,\ 2x-1=0.$

Так как эти уравнения не имеют общих корней (корни первого 2 и 0, корень второго 0,5), то исходное уравнение не имеет действительных корней.

Критерии оценивания:

7	Решение полностью аргументировано.
6	Решение аргументировано, имеется не существенная арифметическая ошибка.
4-5	Решение сведено к сумме двух квадратов, но не обоснованно, что они одновременно не могут быть равны нулю. Либо верно исследованы свойства двух парабол (первый и второй полный квадрат).
3	Получен полный квадрат и квадратный трехчлен, у которого найден нулевой дискриминант либо два трехчлена с нулевым дискриминантом.
1-2	Начало решения. Например, доказано, что уравнение не имеет целых решений.
0	Решение отсутствует или неверное

№2 В бассейне имеется два крана для набора воды и слив. Используя только первый кран, пустой бассейн можно наполнить за 10 часов, а используя только второй – за 15 часов. Если открыты оба крана и слив, то из полного бассейна вся вода выливается за 30 часов. Когда открыли первый кран и слив, бассейн был полон. Ровно через час закрыли первый кран, но открыли второй. Еще через час закрыли слив, но вновь открыли первый кран. Определите, сколько еще нужно минут, чтоб бассейн снова оказался наполненным?

Ответ: 84 минуты.

Решение:

Производительность первого крана 1/10 объема бассейна в час, аналогично производительность второго 1/15 объема бассейна в час. Пусть производительность слива равна (-n) объема бассейна в час. Так как при действии всех трех кранов из полного бассейна вся вода выливается за 30 часов, то 30(1/10+1/15-n)=-1. Отсюда

3+2-30n=-1, 30n=6, n=1/5.

За первый час работы первого крана и слива вытечет воды 1/10-1/5 = -1/10 объема. За второй час работы (второго крана и слива) вытечет 1/15-1/5=-2/15 объема.

Таким образом, после закрытия слива первому и второму крану необходимо долить 1/10+2/15=7/30 объема. Так как их производительность равна 1/10+1/15=5/30=1/6, то искомое время находим по формуле

$$\frac{7}{30}:\frac{1}{6}=\frac{7}{5} \text{ (часа).}$$

В переводе на минуты получаем $\frac{7}{5}\cdot 60=84$ (мин).

Критерии оценивания:

7	Ответ верный, решение полностью аргументировано.
5-6	Ответ верный, решение не до конца обосновано либо ответ неверный из-за одной арифметической ошибки.
4	Ответ частично верный, имеется несколько ошибок при верной общей идее решения.
3	Ответ отсутствует, при этом составлено уравнение, или составлена табличка, но задача не решена. Либо ответ верный без обоснования.
1-2	Имеются начальные шаги в решении. Например, найдено n.
0	Решение отсутствует или неверное

№3 Известно, что десятичная запись натурального числа заканчивается на блок цифр 2132 и при этом число уменьшается в целое число раз при зачеркивании трех последних цифр. Найти все числа, обладающие этим свойством.

Ответ: 2132, 12132, 22132, 132132.

Решение:

1 метод

Из условия задачи следует, что искомое число можно представить в виде $x\cdot 10^4+2132$, где x – натуральное или ноль, при этом после зачеркиваний получается число $x\cdot 10+2$. Следовательно, нужно решить в целых числах уравнение $x\cdot 10^4+2132=(10x+2)k$. Отсюда

$$x\cdot(10^4-10k)=2k-2132,$$

$$x\cdot(10^3\cdot 5-5k)=k-1066.$$

Из данного равенства следует, что k>1000, иначе справа и слева выражения имеют разные знаки. Пусть k=1000+m, m>0, тогда

$$x\cdot(-5m)=m-66,$$

$$x=\frac{66-m}{5m}.$$

Так как числа x и m – целые, то числитель должен быть кратен 5, отсюда число m должно давать остаток 1 при делении на 5. Перебираем такие числа в порядке возрастания: m=1 соответствует x=13, получаем число 132132; далее m=6, x=2, получаем число 22132; m=11, x=1, получаем число 12132; m=66, x=0, получаем число 2132. В остальных случаях x будет не целым.

2 метод

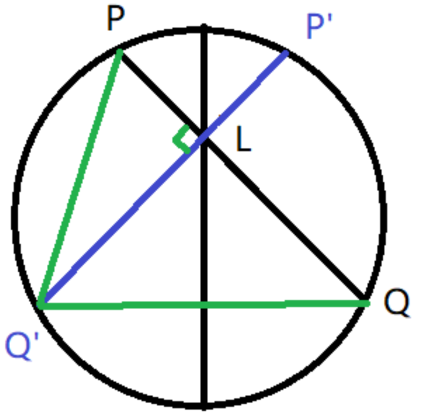
Искомые числа можно представить в виде $.y \cdot 1000 + 132 = ky$, где $y = ...2$ - натуральное число, оканчивающееся цифрой 2. Из данного равенства ясно, что k>1000. Пусть k=1000+m, m>0, тогда $.y \cdot 1000 + 132 = 1000y + my$. Отсюда следует, что m и y – делители числа $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$. При y=132 получаем число 132132; при y=22 получаем 22132; при y= 12 получаем 12132, при y= 2 получаем 2132. Других целых делителей, оканчивающихся на цифру 2, у числа 132 нет.

Критерии оценивания:

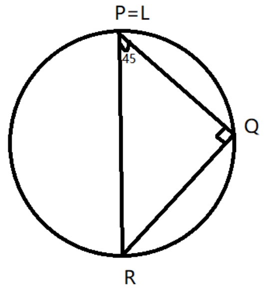
7	Найдены все решения, решение полностью аргументировано.
5-6	Найдены все решения, решение не до конца обосновано, либо при верном решении ответ отличается на одно число по невнимательности.
3-4	Решение частичное, найдено два или более верных ответа. Имеется идея решения. Возможно, задача решена методом перебора.
2	Имеются первые продвижения в решении. Например, составлено уравнение в целых числах и возможно указано одно из решений.
1	Указано, что число 2132 обладает нужным свойством.
0	Решение отсутствует или неверное

№4 Через точку L на диаметре окружности проведена секущая PQ, составляющая с диаметром угол 45 градусов. Докажите, что значение $PL^2 + QL^2$ не зависит от положения точки L на диаметре.

Решение:



Проведем через точку L секущую P'Q' , симметричную относительно диаметра. Тогда угол между P'Q' и диаметром будет тоже 45 градусов, а значит, угол между секущими составит 90 градусов. Так как в силу симметрии QL=Q'L, то по теореме Пифагора $PL^2 + QL^2 = PL^2 + Q'L^2 = Q'P^2$. Треугольник Q'LQ прямоугольный равнобедренный, поэтому угол LQQ'=45. Из треугольника PQQ' по теореме синусов

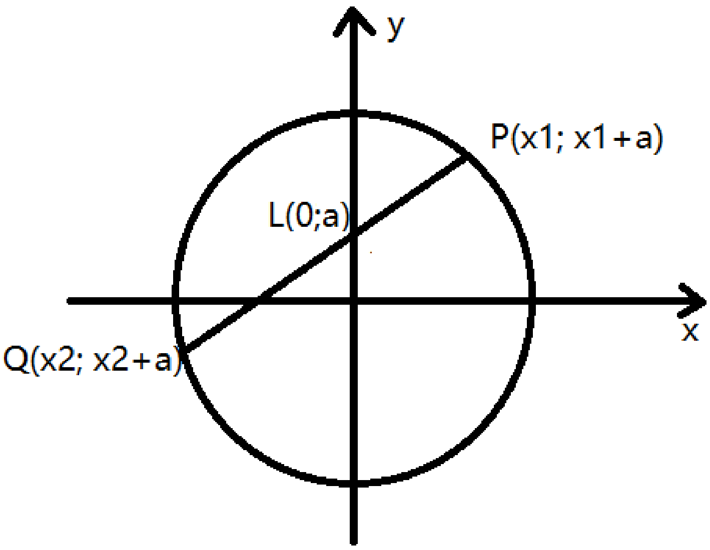


$\frac{Q'P}{\sin 45} = 2R$, где R-радиус окружности. Отсюда $Q'P = \sqrt{2}R$, $PL^2 + QL^2 = Q'P^2 = 2R^2$. Данные выкладки не зависят от положения точки L на диаметре.

В предельном случае, когда точка L лежит на окружности, PL вырождается в точку. При этом угол LQR, опирающийся на диаметр LR, является прямым. Отсюда $QL = 2R\cos 45 = \sqrt{2}R$, значит $PL^2 + QL^2 = 0 + 2R^2 = 2R^2$.

Критерии оценивания:

7	Доказательство полностью аргументировано.
5-6	Имеется неточность в рассуждении, не влияющая на общую логику решения либо один из фактов не доказан.
3-4	Имеется идея решения (например, дополнительное построение), но доказательство не полное.
1-2	Имеются начальные продвижения в доказательстве. Например, найдена сумма квадратов в предельном случае.
0	Решение отсутствует или неверное



Возможно решение задачи методом координат.

Поместим центр окружности в начало координат, тогда ее уравнение $x^2 + y^2 = R^2$.

Пусть точка L располагается на диаметре, который совпадает с осью OY, тогда L(0;a), где $a \in [-R; R]$ - параметр.

Так как секущая PQ образует с диаметром угол 45 градусов, то прямая PQ имеет уравнение y=a+x (угловой коэффициент k=1=tg45). Тогда абсциссы x1, x2 точек P и Q находятся как решения уравнения $x^2 + (a+x)^2 = R^2$, т.е. $2x^2 + 2ax + a^2 - R^2 = 0$. Допустим x1 и x2 найдены, тогда по формуле расстояния между двумя точками $PL^2 + QL^2 = (x1-0)^2 + (a+x1-a)^2 + (x2-0)^2 + (a+x2-a)^2 = 2(x1^2 + x2^2)$.

Отсюда, используя теорему Виета, получаем

$$x1^2 + x2^2 = (x1+x2)^2 - 2x1x2 = (-a)^2 - 2\frac{a^2 - R^2}{2} = R^2.$$

Таким образом, $PL^2 + QL^2 = 2(x1^2 + x2^2) = 2R^2$. Ответ не зависит от параметра a, значит, не зависит от выбора точки L на диаметре.

№4 В некотором городе по статистике 90% населения умеет изъясняться по-английски, 85% – по-немецки, 80% – по-французски и 75% – по-испански. Какой наибольший и наименьший процент населения при этих данных может изъясняться на всех четырёх языках сразу?

Решение:

Наибольший процент не может превышать 75% – количества испаноговорящих жителей города. Это достигается, если каждый испаноговорящий житель может изъясняться и на остальных трёх языках.

Найдём наименьший процент. Для этого предположим, что все население города составляет 100 тыс. чел. Пусть А, Н, Ф, И – подмножества граждан, соответствующие говорящим на английском, немецком, французском и испанском языках соответственно. Пусть $x = n(A \cap H)$ – число элементов во множестве $A \cap H$, тогда $n(A \cup H) = n(A) + n(H) - n(A \cap H) \le 100$, отсюда $90 + 85 - x \le 100$, $x \ge 75$. Аналогично, пусть $y = n(Ф \cap И)$ – число элементов во множестве $Ф \cap И$, тогда $n(Ф \cup И) = n(Ф) + n(И) - n(Ф \cap И) \le 100$, отсюда $80 + 75 - y \le 100$, $y \ge 55$.
Теперь, $n((A \cap H) \cup (Ф \cap И)) = x + y - n(A \cap H \cap Ф \cap И) \le 100$, следовательно $n(A \cap H \cap Ф \cap И) \ge x + y - 100 \ge 75 + 55 - 100 = 30$.

Значение 30 реализуется на таком примере. Все население города 100 тыс. человек разбиваем на непересекающиеся подмножества: 30 тыс. жителей владеют всеми четырьмя языками, 25 тыс. английским, немецким и французским, 20 тыс. – английским, немецким и испанским, 15 тыс. – английским, французским и испанским, остальные 10 тыс. – немецким, французским и испанским. При этом все условия задачи выполнены.

Оценка суммируется из трех блоков:

1	Наибольший процент с писанием того, когда он реализуется.
3	Оценка того, что минимальный процент >=30. Идея оценки – 1 балл.
3	Пример, показывающий, что 30 процентов реализуется. Пример может быть продемонстрирован на кругах Эйлера или схематично, но обязательно с распределением того, сколько процентов в каждом пересечении.