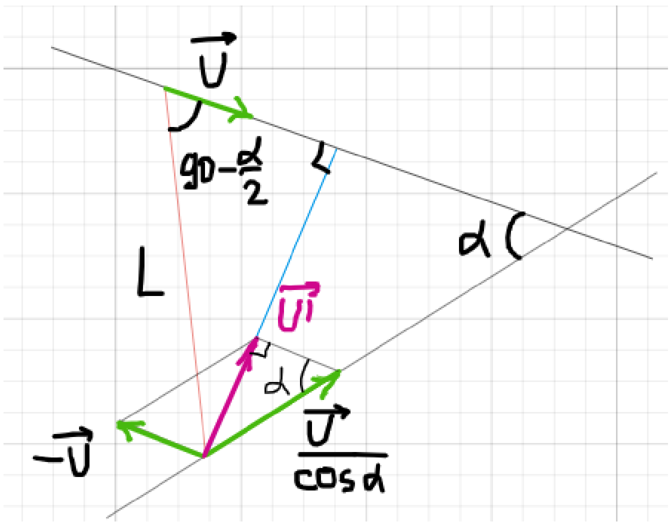
1. Две материальные точки равномерно движутся в одной плоскости по пересекающимся под углом α прямым траекториям. Скорости точек равны U и $\frac{U}{\cos\alpha}$. В некоторый момент времени положения материальных точек составляют с точкой пересечения траекторий равнобедренный треугольник с углом при вершине α и основанием L. Определите, на какое минимальное расстояние сближаются точки во время своего движения.

РЕШЕНИЕ:

Перейдем в СО, связанную с одной из точек, например, с первой. В этом случае, вектор скорости второй точки изменится по величине и направлению и будет определяться как векторная разность исходных скоростей, причем результирующая скорость

$$\overrightarrow{U'} = \frac{\vec{U}}{\cos\alpha} - \vec{U}$$



будет скоростью сближения второй точки с неподвижной первой. Так как скорости точек равны U и $\frac{U}{\cos\alpha}$, они образуют с результирующей скоростью U' прямоугольный треугольник, у которого U' и U являются катетами.

Искомое минимальное расстояние между точками равно длине перпендикуляра между неподвижной первой точкой и направлением $\overrightarrow{U'}$. Этот перпендикуляр представляет собой катет треугольника с гипотенузой L и прилежащим углом $90 - \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, материальные точки сблизятся на минимальное расстояние

$$l_{min} = Lcos(90 - \frac{\alpha}{2}) = Lsin\frac{\alpha}{2}$$

ОТВЕТ:

$$l_{min} = Lcos(90 - \frac{\alpha}{2}) = Lsin\frac{\alpha}{2}$$

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Совершен переход в другую СО – 2 балла

Построен треугольник скоростей – 2 балла

Доказано, что треугольник скоростей прямоугольный – 2 балла

Доказано, что треугольник с минимальным расстоянием прямоугольный – 2 балла

Определено минимальное расстояние – 2 балла

2. В эксперименте по изучению свободного падения тел были получены следующие результаты: тело, брошенное вертикально вверх с поверхности Земли с некоторой скоростью за некоторое время прошло путь 162,5 м, переместившись на 40 м. С какой скоростью было брошено тело и в какой момент после бросания наступила данная ситуация?

РЕШЕНИЕ:

В течение всего времени движения тело движется вертикально с ускорением g, сначала вверх, затем вниз. Очевидно, что ситуация, описанная в эксперименте, возникла при движении тела вниз (путь > перемещения).

Пусть L – пройденный путь, H – максимальная высота подъема тела, v_0 – скорость, с которой бросили тело, v_1 – скорость тела при движении вверх и перемещении $\vec{s}$. Тогда пусть

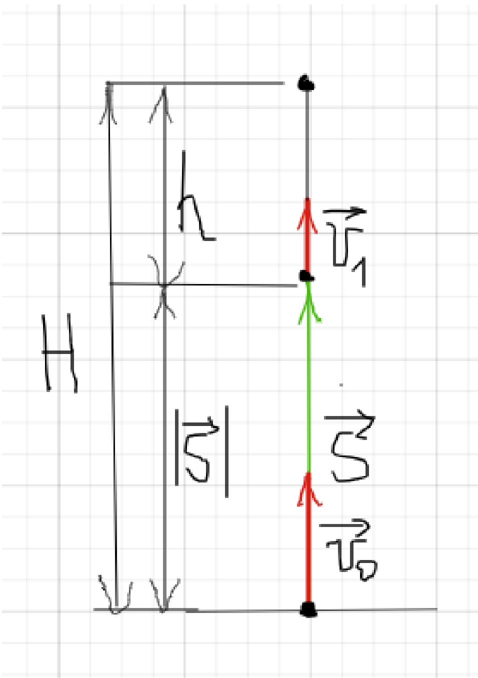
$h = H - |\vec{s}|$ и, следовательно, $L = H + h = 2h + |\vec{s}|$, откуда $h = \frac{L - |\vec{s}|}{2}$.

Используя уравнения кинематики равноускоренного движения для участка h

$$h = \frac{0 - v_1^2}{-2g} = \frac{v_1^2}{2g}$$

и участка $|\vec{s}|$

$$|\vec{s}| = \frac{v_1^2 - v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g},$$



получаем, что $v_0 = \sqrt{g(L + |\vec{s}|)} = \sqrt{10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(162{,}5\text{м} + 40\text{м})} = 45\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Для определения момента времени, в который наступила данная ситуация, необходимо решить квадратное уравнение

$$|\vec{s}| = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

С учетом полученного значения v_0 получаются корни $t_1 = 1$ с и $t_2 = 8$ с. Ответом на вопрос задачи, с учетом условия, является корень 8 с.

ОТВЕТ: $v_0 = 45$ м/с, t = 8 с.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Описано движение тела на участке h – 1 балл

Описано движение тела на участке $|\vec{s}|$ – 1 балл

Получена связь между $|\vec{s}|$ и L – 1 балл

Решена система уравнений и получена формула для v_v – 3 балла

Записано квадратное уравнение для определения t – 2 балла

Получены корни квадратного уравнения – 1 балл

Выбран правильный корень – 1 балл

3. В сосуд с водой массой 3 кг опустили работающий нагреватель. Через 15 с температура воды увеличилась на 4 ^{0}С. Нагреватель вынули и за 50 с вода остыла до прежней температуры. Сколько теплоты отдал нагреватель воде? Какова мощность нагревателя? Теплоемкостью сосуда пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

Остывание воды после вынимания нагревателя свидетельствует о теплообмене воды с окружающей средой, который, следовательно, имел место и во время нахождения нагревателя в воде. Следовательно, то изменение температуры, которое претерпела вода за 15 с есть результат участия воды в двух теплообменах одновременно – с нагревателем и окружающей средой, а за 50 с – в одном – с окружающей средой.

Очевидно, что эти два теплообмена независимы друг от друга, то есть мощность теплопередачи $P = \frac{Q}{\Delta\tau}$ есть величина постоянная для каждого теплообмена в течение всего соответствующего промежутка времени $\Delta\tau$.

Пусть P_1 – мощность теплопередачи при теплообмене с работающим нагревателем (мощность нагревателя), P_2 – мощность теплопередачи при теплообмене с окружающей средой. Тогда

$$P_1\Delta\tau_1 + P_2\Delta\tau_1 = cm\Delta t \qquad P_2\Delta\tau_2 = -cm\Delta t$$

В последнем уравнении учтено, что вода по условию остывала.

После математических преобразований получаем:

$$P_1 = \frac{\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2}{\Delta\tau_1\Delta\tau_2} cm\Delta t = 4368 \text{ Вт}$$

$$Q = P_1\Delta\tau_1 = 65520 \text{ Дж}$$

ОТВЕТ: 4368 Вт, 65520 Дж

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Учтено, что вода учувствовала в двух теплообменах – 1 балл

Записано уравнение для нагревания – 2 балла

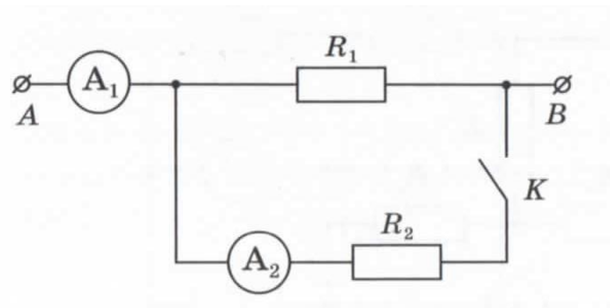
Записано уравнение для охлаждения – 2 балла

Решена система уравнений и получено значение мощности – 3 балла

Записана формула для количества теплоты – 1 балл

Получено значение количества теплоты – 1 балл

4. К выводам А и В цепи подключают батарейку. При разомкнутом ключе показания амперметра A_1 составляют 3 мА, а при замкнутом 5 мА. Что показывает амперметр A_2 в этих двух случаях? Амперметры идеальные.



РЕШЕНИЕ:

Амперметр всегда показывает значение силы тока, протекающего через него.

Очевидно, что при разомкнутом ключе второй амперметр показывает ноль, так как ветвь цепи, в которую он включен, незамкнута, и ток через второй амперметр не течет. При этом, с учетом идеальности первого амперметра (напряжение на нем равно нулю), можно сказать, что напряжение батарейки $U_б = I_1' R_1$, где I_1' - показания первого амперметра при разомкнутом ключе.

В случае замкнутого ключа через второй амперметр течет ток. Так как амперметр идеальный, то напряжение на нем равно нулю. Показания второго амперметра равны току, протекающему во втором резисторе, так как они соединены последовательно. Напряжение на нижней части цепи равно напряжению на первом резисторе, так как они соединены параллельно

$$U_2 + 0 = U_1$$

Ток через первый резистор равен разности показаний первого и второго амперметров. Используя закон Ома для участка цепи, получаем:

$$U_2 = (I_1 - I_2) R_1$$

Так как амперметры идеальны, то напряжения на параллельных резисторах равны напряжению батарейки, следовательно

$$U_2 = U_б = I_1' R_1$$

окончательно получаем:

$$I_1' = I_1 - I_2$$

Следовательно

$$I_2 = I_1 - I_1' = 5 \text{ мА} - 3 \text{ мА} = 2 \text{ мА}$$

ОТВЕТ: 2 мА при замкнутом ключе, 0 при разомкнутом ключе.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Определены показания при разомкнутом ключе (без объяснений) – 1 балл

Дано объяснение показаниям при разомкнутом ключе – 1 балл

Отмечена и учтена идеальность амперметров – 1 балл

Использованы знания о последовательном соединении – 1 балл

Использованы знания о параллельном соединении – 1 балл

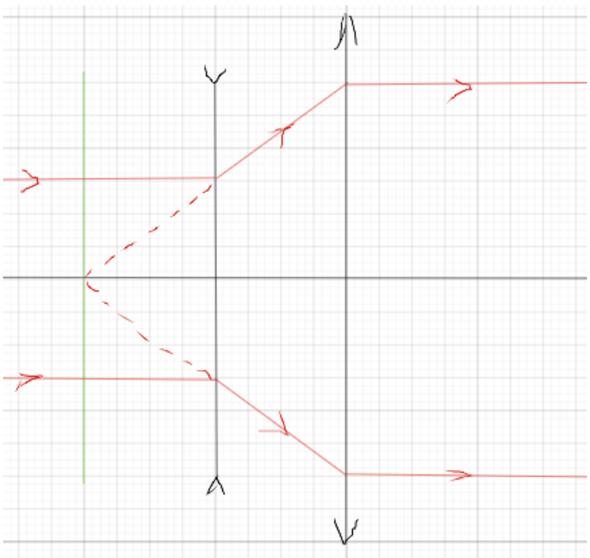
Использован закон Ома – 1 балл

Определены показания второго амперметра при замкнутом ключе – 4 балла

5. Имеется две тонкие линзы – собирающая и рассеивающая, с фокусными расстояниями F и $\frac{1}{2}F$ соответственно. Их размещают параллельно друг другу так, чтобы главные оптические оси совпадали. На одну из линз направляют соосный главной оптической оси параллельный пучок света диаметром D и, двигая вторую линзу, добиваются, чтобы выходящий из нее пучок света был также параллельным и соосным главной оптической оси. На каком расстоянии находятся при этом линзы? Каков диаметр выходящего пучка? Рассмотреть оба случая падения лучей.

РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим световой пучок, падающий на рассеивающую линзу. После преломления в ней лучи пойдут так, как если бы они исходили из точки главного фокуса рассеивающей линзы – продолжения преломленных лучей должны проходить через главный фокус. Так как, по условию, после преломления в собирающей линзе расходящиеся лучи опять становятся параллельным пучком, значит они (точнее, их продолжения после выхода из рассеивающей линзы) попадают на собирающую линзу предварительно пройдя через ее главный фокус. Следовательно, главные фокусы линз совпадают. Поэтому расстояние между линзами должно быть равным разности фокусных расстояний, то есть $\frac{1}{2}F$.



Для определения диаметра выходящего пучка необходимо рассмотреть подобные треугольники, образованные главной оптической осью линз, лучами и радиусами пучков. Видно, что в данном случае $d = 2D$, то есть пучок утолщается.

Случай падения пучка на собирающую, а потом рассеивающую линзы удобно анализировать, воспользовавшись обратимостью хода лучей. Направив лучи противоположно вышерассмотренному случаю, сразу получаем, что расстояние между линзами должно быть таким же, а диаметр пучка уменьшается в 2 раза, то есть пучок утончается.

ОТВЕТ: Расстояние между линзами в обоих случаях $\frac{1}{2}F$, диаметр пучка в случае РС увеличивается, а в случае СР уменьшается в 2 раза.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Определено расстояние между линзами в одном случае – 3 балла

Определен диаметр пучка в одном случае – 2 балла

Определено расстояние между линзами в другом случае – 3 балла

Определен диаметр пучка в другом случае – 2 балла